Tentamen Computerondersteund Probleemoplossen

15 april 2009, 9.00-12.00 uur.

Het tentamen bestaat uit vijf opgaven, waarvoor je in het totaal 9 punten kunt halen; 1 punt krijg je zowiezo. De detailnormering staat onderaan het tentamen. Alle antwoorden moeten goed gestructureerd en gemotiveerd zijn. De gevolgde werkwijze moet duidelijk zijn. Het tentamen is gesloten boek, maar je mag wel een overzicht van Matlab bevelen raadplegen tijdens het tentamen. Zowel eigengemaakte als van Nestor gehaalde overzichten zijn toegestaan. *Wanneer je code moet schrijven, doe dit dan zorgvuldig en zoals besproken in de cursus. Een correct programma is niet voldoende. Een programma moet ook leesbaar zijn en gedocumenteerd zijn waar nodig.* Vermeld op ieder blad je naam, studentnummer en studierichting. Succes!

1. We beschouwen de integralen

$$E_n = \int_0^1 x^n \, e^{x-1} \, dx$$

waarbij $n = 0, 1, 2, 3, ...$
Uit een directe berekening volgt $E_0 = 1 - 1/e$. M.b.v. partiële integratie kan worden aangetoond dat

$$E_n = 1 - nE_{n-1}$$

(a) Stel we willen $E_1, E_2, ..., E_{20}$ berekenen. Welke van de volgende methoden is op basis van nauwkeurigheid en snelheid de beste keuze? Motiveer!

i. Gebruik de trapeziumregel met stapgrootte $h = 1/100$ om E_n te benaderen voor $n = 1, 2, 3, .., 20$.

ii. Gebruik de recursieve relatie: start met $E_0 = 1 - 1/e$ en bereken voor $n = 1, 2, 3, .., 20$: $E_n = 1 - nE_{n-1}$.

iii. Gebruik achterwaartse recursie: start met $E_{32} = 0$ en bereken voor $n = 32, 31, 30, ..., 1$ $E_{n-1} = (1 - E_n)/n$. Gooi $E_{21}, E_{22}, ..., E_{32}$ weg.

(b) Stel we willen uitsluitend E_{20} berekenen. Wat is dan de beste keuze? Motiveer.

(c) Schrijf drie Matlab programmaatjes die aan de hand van methode i, ii en iii respectievelijk, E_{20} berekenen.

2. De Taylor-reeks van de functie $f(x) = e^x$ (rondom $x = 0$) wordt gegeven door

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Schrijf een Matlab-functie (met invoerargument x) die e^x benadert door de Taylor-reeks af te breken. Het programma moet e^x benaderen door (vanaf $n = 0$) de termen van de reeks te sommeren totdat de absolute waarde van de (laatste) term kleiner is dan 0.0001. Het programma moet zowel de benadering van e^x als het aantal gesommeerde termen schrijven naar de file 'resultaat.txt' (geformateerd). Als na 30 termen de laatste term niet kleiner is dan 0.0001, dan moet de berekening stoppen en de tekst 'Berekening afgebroken - meer dan 30 termen nodig' op het scherm verschijnen.

3. Schrijf een Matlabprogramma dat aan de gebruiker een getal $x > 1$ vraagt, en vervolgens het grootste natuurlijke getal n berekent waarvoor geldt dat $n! \leq x$. Documenteer het programma zodanig dat het leesbaar is voor een iemand die zich niet in deze opgave heeft verdiept. Bespreek de gevolgde strategie.

4. De coefficientenmatrix en het rechterlid van het stelsel $Ax = b$ worden gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{bmatrix}.$$

De exacte oplossing x luidt:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Numeriek kan d.m.v. Gauß-elliminatie (zonder pivoteren) een benadering $\tilde{x}$ van x worden bepaald. Als de tussenresultaten van de verschillende stappen van het Gauß-elliminatie proces worden afgerond op 11 cijfers, dan volgt

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.6662 \\ -0.0002 \end{bmatrix}.$$

Het residu

$$r := b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} -10^{-8} \\ 10^{-8} \end{bmatrix}$$

is klein, doch $\tilde{x}$ wijkt zeer veel af van de exacte oplossing x. Leg uit hoe dit kan. Wat is partiëel pivoteren? Lost partiëel pivoteren dit probleem op?

5. We beschouwen de differentiaalvergelijking $y'(t) = f(y(t), t)$. We kunnen deze vergelijking benaderen m.b.v. de voorwaartse Euler methode, $y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$, waarbij de stapgrootte gelijk is aan $h = t_{n+1} - t_n$. Of met de achterwaartse Euler methode $y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1})$.

   (a) Schrijf beide methoden uit voor de testvergelijking $y' = \alpha y$, waarbij α een willekeurig complex getal is.

   (b) Bepaal alle αh waarvoor de voorwaartse Euler methode absoluut stabiel is.

   (c) Idem, voor de achterwaartse Euler methode.

Detailnormering:

0,2	1a	1.0	2:	1.5	3:	2.0	4:	1.0	5a	0.2	R.
0,3	b	0.5		0,5		1		0,5	b	0.6	0,5
0,5	c	1.5							c	0.7	